

Key concepts:

- 非时齐 *Poisson* 过程;
- 复合 *Poisson* 过程;
- 条件 *Poisson* 过程.

回顾 *Poisson* 过程的定义, 需要满足

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 具有平稳增量和独立增量;
- (3) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$
- (4) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

则称为具有速率 $\lambda (\lambda > 0)$ 的 *Poisson* 过程。我们这节放松其中的一些条件, 推广 *Poisson* 过程。

3.1 非时齐 *Poisson* 过程

本小节放松平稳增量这一条件, 也就是说过程的速率会依赖于时间, 下面给出非时齐 *Poisson* 过程的定义

Definition 3.1 (非时齐 *Poisson* 过程) 若计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足:

(1) $N(0) = 0$;

(2) 具有独立增量;

(3) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$, $\lambda(t), t \geq 0$ 为连续函数

(4) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$

则称为具有强度函数 $\lambda(t)$ 的非时齐 (Nonhomogeneous) Poisson过程。

与标准Poisson 过程一样, 我们接下来考察 $N(t)$ 的分布。

Proposition 3.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一个非时齐Poisson过程, 记

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

在区间 $[t, t+s]$ 中的事件数 $N(t+s) - N(t)$ 服从均值为 $m(t+s) - m(t) = \int_t^{t+s} \lambda(y) dy$ 的Poisson分布, 即

$$P\{N(t+s) - N(t) = n\} = \exp\{-[m(t+s) - m(t)]\} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}.$$

Proof: 与定理2.5的证明想法类似。对给定的 t , 定义:

$$P_n(s) \triangleq P\{N(t+s) - N(t) = n\}$$

则有

$$\begin{aligned} P_0(s+h) &= P\{N(t+s+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{(t, t+s) \text{中有} 0 \text{个事件}, (t+s, t+s+h) \text{中有} 0 \text{个事件}\} \\ &= P\{(t, t+s) \text{中有} 0 \text{个事件}\} P\{(t+s, t+s+h) \text{中有} 0 \text{个事件}\} \\ &= P_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)], \end{aligned}$$

因此

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h}.$$

令 $h \rightarrow 0$, 得到微分方程

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s)$$

即

$$\log P_0(s) = - \int_0^s \lambda(t+u) du$$

解得

$$P_0(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}.$$

对于 $n \geq 1$, $P_n(s)$ 可仿照定理2.5计算。 ■

3.2 复合Poisson过程

本小节放松时间微元内发生事件次数的条件，不再规定

$$P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h).$$

标准Poisson过程每次事件发生时我们只记录“+1”，但是现在允许事件发生可以“+n”。

先给出复合Poisson随机变量的定义和性质。

Definition 3.3 (复合Poisson随机变量)

设 X_1, X_2, \dots 是分布为 F 的 *i.i.d.* 随机变量序列，且与一个均值为 λ 的 *Poisson* 随机变量 N 独立。随机变量

$$W \triangleq \sum_{i=1}^N X_i$$

称为具有参数 λ 和分量分布 F 的复合 *Poisson* 随机变量。

注. 当 F 是离散分布的时候， W 可以表示为独立 *Poisson* 随机变量的线性组合。

设 X_i 为离散随机变量，分布列为

$$P\{X_i = j\} = p_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad \sum_{j=1}^k p_j = 1.$$

记 N_j 为 X_i 中等于 j , $j = 1, \dots, k$ 的个数，则

$$W = \sum_{j=1}^k jN_j$$

其中 N_j 分别为具有均值 λp_j 的独立Poisson随机变量。(参考教材例1.5 I)

Proposition 3.4

设 X_1, X_2, \dots 的矩母函数为 $\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i}]$, 则复合Poisson随机变量 W 的矩母函数为

$$\psi(t) = e^{-\lambda} \exp\{\lambda\psi_X(t)\}.$$

通过矩母函数求导即得

$$\mathbb{E}[W] = \lambda\mathbb{E}[X], \quad \text{Var}[W] = \lambda\mathbb{E}[X^2], \quad X \sim F$$

证明参考教材2.5节。

Definition 3.5 (复合Poisson过程) 一个随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 称为复合Poisson过程, 如果对任意 $t \geq 0$, $X(t)$ 可以表示为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

其中 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个Poisson过程, X_i 是一族*i.i.d.*随机变量, 且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 即 $X(t)$ 是复合Poisson随机变量。

3.3 条件Poisson过程

本小节放松独立增量这一条件, 现在考虑速率参数 λ 不是固定的, 而是一个随机变量 Λ 。

Definition 3.6 (条件Poisson过程)

设 Λ 是一个具有分布 G 的正值随机变量, 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为一个条件Poisson过程, 如果: 给定 $\Lambda = \lambda$, $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个速率为 λ 的Poisson过程。即

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda).$$

注. 条件Poisson过程不是独立增量过程。只需证:

$$\begin{aligned} & P(N(s) = m, N(t+s) - N(s) = n) \\ & \neq P(N(s) = m) P(N(t+s) - N(s) = n) \end{aligned}$$

事实上,

$$\begin{aligned} & P(N(s) = m, N(t+s) - N(s) = n) \\ &= \int_0^\infty \exp(-\lambda s) \frac{(\lambda s)^m}{m!} \exp(\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda) \\ &\neq \int_0^\infty \exp(-\lambda s) \frac{(\lambda s)^m}{m!} dG(\lambda) \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda) \\ &= P(N(s) = m) P(N(t+s) - N(s) = n) \end{aligned}$$

条件Poisson过程本质上是一种含随机参数的Poisson过程。现实中, 我们可以根据记录的条件Poisson过程, 进行贝叶斯推断, 得到对随机参数 Λ 的估计。即计算给定 $N(t) = n$ 时, Λ 的条件分布。

对于充分小的 $d\lambda$,

$$\begin{aligned} & P\{\Lambda \in (\lambda, \lambda + d\lambda) \mid N(t) = n\} \\ &= \frac{P\{N(t) = n \mid \Lambda \in (\lambda, \lambda + d\lambda)\} P\{\Lambda \in (\lambda, \lambda + d\lambda)\}}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda)} \end{aligned}$$

从而给定 $N(t) = n$, Λ 的条件分布为

$$P\{\Lambda \leq x \mid N(t) = n\} = \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^n dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n dG(\lambda)}.$$

进一步, 若 Λ 具有概率密度 $g(\lambda)$, 则后验概率密度为

$$g(\lambda \mid N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda}.$$

Example 3.7 某地区每年的下雨次数服从Poisson过程, 为了简化问题, 假定下雨的持续时间可以忽略。由于一些未知因素的影响, 该地区下雨次数所服从的Poisson过程的强度年年不同。假定该强度是一个随机变量。希望能够通过对今年到时刻 t 以前下雨次数的统计, 对今年的下雨强度作出推断, 同时利用该结果预测何时再次下雨。

设今年到时刻 s 为止已经下了 n 场雨，则强度的后验概率密度为

$$g(\lambda | N(s) = n) = \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^n g(\lambda)}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} (\lambda s)^n g(\lambda) d\lambda}.$$

如果从时刻 s 开始，到下一次下雨的间隔为 $T(s)$ ，那么在已知 s 为止已经下了 n 场雨条件下， $T(s)$ 的后验分布为

$$P(T(s) \leq x | N(s) = n) = \frac{\int_0^{\infty} (1 - \exp(-\lambda x)) \exp(-\lambda s) (\lambda s)^n dG(\lambda)}{\int_0^{\infty} \exp(-\lambda s) (\lambda s)^n dG(\lambda)}.$$